अनुक्रमांक

नाम ...

131 324(EJ)

2019

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) There are in all *nine* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to questions are indicated against the question.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) समुच्चय A (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) में R ((a, b) : a तथा b दोनों ही या तो सम हैं या विषम हैं ।

तो निम्न में से सही सम्बन्ध चयन कीजिए :

i) सम्बन्धहीन ii) तुच्छ (1)

iii) स्वतुल्यता iv) सममित नहीं। 1

Previous Pathshala

ख) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x \ \forall x \in R$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$ आच्छादक है। 1

ग) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$ का समाकलन कीजिए। 1

घ) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

ङ) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

की घात क्या है ? 1

1. Attempt *all* the parts of the following :

a) Write the correct option from the following if

$R\{(a, b) : a$ and b both are either even or odd $\}$ in the set

$A\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:

i) No relation

ii) Trivial

iii) Equivalence relation

iv) Not symmetric. 1

b) Prove that the function $f : R \to R$ defined on $f(x) = 2x \ \forall x \in R$ is onto. 1

c) Evaluate $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$. 1

d) Find the angle between the vectors $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. 1

e) Find the degree of the differential equation :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]$. 1

ख) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ न तो एकैकी है और न आच्छादक है। 1

Previous Pathshala

ग) निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ है ?

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$. 1

घ) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, $x = 0$ पर संतत है। 1

ङ) A और B दो घटनाएँ हैं कि $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$ तब निम्न से घटनाओं के बारे में सही चयन कीजिए :

i) $A \subset B$ ii) $A = B$

iii) $A \cap B = \phi$ iv) $P(A) = P(B)$. 1

2. Attempt *all* the parts of the following :

a) Prove that

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]$. 1

b) Prove that the function $f : R \to R$ defined on $f(x) = x^2$ is neither one-one nor onto. 1

c) Which of the following differential equations has $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, a general solution ?

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$. 1

d) Examine that the function $f(x) = x^2$ is continuous at $x = 0$. 1

e) A and B are two events such that $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$. Write the correct option from the following :

i) $A \subset B$ ii) $A = B$

iii) $A \cap B = \phi$ iv) $P(A) = P(B)$. 1

3. निम्नलिखित **सभी** खण्डों का हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ एकैकी है, तो $gof : A \to C$ भी एकैकी है। 2

Previous Pathshala

ख) यदि $y = \sin^{-1} x$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}.$$ 2

ग) यदि सदिश $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और सदिश $3\hat{i} + b\hat{j}$ लम्बवत हों तो सिद्ध करें कि $3a + 2b = 0$. 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़की हो तो दोनों बच्चों के लड़की होने की क्या प्रायिकता है ? 2

3. Attempt *all* the parts of the following :

a) Prove that if $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are one-one, then $g \circ f : A \to C$ is also one-one. 2

b) Prove that $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}$ if $y = \sin^{-1} x$. 2

c) If vectors $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + b\hat{j}$ are perpendicular then prove that $3a + 2b = 0$. 2

d) There are two children in a family. If it is known that at least a child is a girl then what is the probability that both the children are girls ? 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0{\cdot}6$, $P(F) = 0{\cdot}3$ और $P(E \cap F) = 0{\cdot}2$, तो $P(E/F)$ तथा $P(F/E)$ के मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) दिखाएँ कि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ होते हैं। 2

ग) दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब हैं। 2

घ) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

4. Attempt *all* the parts of the following :

a) If E and F are two events such that $P(E) = 0{\cdot}6$, $P(F) = 0{\cdot}3$ and $P(E \cap F) = 0{\cdot}2$, find the values of $P(E/F)$ and $P(F/E)$. 2

Previous Pathshala

b) Show that $|\bar{a}+\bar{b}|<|\bar{a}|+|\bar{b}|$ is always true for any two vectors $\bar{a}$ and $\bar{b}$. 2

c) Show that the lines $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ and $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ are orthogonal to each other. 2

d) Evaluate : $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)}\,dx$. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) मान ज्ञात कीजिए $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$. 5

ख) दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$ 5

ग) उस समतल का सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (5, 2, – 4) से जाता है तथा (2, 3, – 1) दिक्-कोज्या वाली रेखा पर लम्ब है। 5

घ) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2+y^2=32$, रेखा $y=x$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

ङ) सिद्ध कीजिए

$$2\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}.$$ 5

च) आलेखीय विधि से $Z=3x+9y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, जिसके अवरोध निम्नवत हैं :

$x+3y\le 60$

$x+y\ge 10$

$x\le y,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$ 5

5. Attempt any *five* parts of the following :

a) Evaluate $\int \frac{dx}{1-\cos x-\sin x}$. 5

b) Show that

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$ 5

c) Find the vector and Cartesian equation of a plane which passes through point (5, 2, – 4) and is perpendicular to the line having (2, 3, – 1) its direction cosines. 5

Previous Pathshala

d) Find the area of the region enclosed in first quadrant by the circle $x^2 + y^2 = 32$, line $y = x$ and x-axis. 5

c) Prove that

$$2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}.$$ 5

f) Find the minimum value of $Z = 3x + 9y$ graphically of a problem satisfying the following constraint equations :

$x + 3y \leq 60$

$x + y \geq 10$

$x \leq y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$ 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित फलन के सांतत्य और अवकलनीयता का $x = 1$ पर विचार कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{यदि } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$ 5

ख) x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

$$e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x .$$ 5

ग) एक स्थिर तालाब में एक पत्थर डाला जाता है और उत्पन्न तरंगें वृत्त में 4 cm/sec की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंगों की त्रिज्या 10 cm है, तो उस क्षण घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है ? 5

घ) अवकल समीकरण

$xy\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ के लिए बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाली वक्र ज्ञात कीजिए। 5

ङ) रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

च) एक रोगी डाक्टर से मिलने ट्रेन, बस, स्कूटर या अन्य किसी वाहन से जाता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ हैं। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ या $\frac{1}{12}$ हैं परन्तु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

Previous Pathshala

6. Attempt any *five* parts of the following :

a) Discuss the continuity and differentiability of

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x \le 1 \\ x-2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

at $x = 1$. 5

b) Differentiate :

$e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ with respect to x. 5

c) A stone is dropped in a calm and quiet pond. The generated waves move in a circular form with 4 cm/sec speed. Find out with what speed the area covered by the waves is increasing when the radius of the travelling circular waves is 10 cm. 5

d) Find the curve passing through the point (1, − 1) having its differential equation

$$xy\frac{dy}{dx} = (x-2)(y+2).$$ 5

e) Find the area enclosed by the lines $y = 3x + 2$, x-axis, and ordinates $x = -1$ and $x = 1$. 5

f) A patient is travelling to a doctor by train, bus, scooter or any other means of transport whose probabilities are $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ or $\frac{2}{5}$ respectively. If he travels by train, bus or scooter he reaches late and their probabilities are $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ or $\frac{1}{12}$ respectively. He reaches on time if he travels by any other means of transport. If he reached late, find the probability of his coming by train. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1.$$ 8

ख) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

Previous Pathshala

7. Attempt any *one* part of the following :

a) Solve the following equations :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1$$

by matrix method. 8

b) Find A^{-1} if matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$ 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरा हुआ है। 8

ख) रेखाओं $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the area of the region enclosed by the curve $y = \cos x$ between $x = 0$ and $x = 2\pi$. 8

b) Find the shortest distance between the lines

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1} \text{ and}$$
$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}.$$ 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int \frac{e^x}{(1-e^x)(2+e^x)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x.$$ 8

9. Attempt any *one* part of the following :

a) Evaluate :

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)} dx.$$ 8

b) Solve : $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x$. 8

324(EJ)-1,50,000

Previous Pathshala