

अनुक्रमांक

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम

131/1

334(DU)

2018

गणित

प्रथम प्रश्नपत्र

(बीजगणित, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन
तथा निर्देशांक ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए
निर्धारित हैं।

निर्देश : (i) इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है
कि उसके कितने खण्ड करने हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते
जाइए।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Note : (i) There are in all **eight** questions in this
question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the
number of parts to be attempted has
been clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are
indicated against them.

(v) Start from the first question and proceed
to the last one.

(vi) Do not waste time over a question which
you cannot solve.

I. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) दीर्घवृत्त $(a - b)x^2 + (a + b)y^2 = a^2 - b^2$ को मानक
रूप में व्यक्त कीजिए। 1

(ख) सिद्ध कीजिए कि आयतीय अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$
की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है। 1

(ग) असमिका $24x < 100$ को हल कीजिए, जब x एक
प्राकृत संख्या है। 1

(घ) यदि $\begin{bmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ हैं, तो x , y तथा z के मान
ज्ञात कीजिए। 1

(ङ) बिन्दुओं $P(1, -3, 4)$ और $Q(-4, 1, 2)$ के बीच की
दूरी ज्ञात कीजिए। 1

1. Attempt any four parts of the following :

- (a) Express the Ellipse $(a-b)x^2 + (a+b)y^2 = a^2 - b^2$ in standard form. 1
- (b) Prove that eccentricity of rectangular Hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$ is $\sqrt{2}$. 1
- (c) Solve the inequality $24x < 100$ when x is a natural number. 1
- (d) If $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, then find value of x , y and z . 1
- (e) Find distance between two points $P(1, -3, 4)$ and $Q(-4, 1, 2)$. 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि परवलय $y^2 = 4ax$ बिन्दु $(9, -12)$ से होकर जाता है, तो नाभिलम्ब की लम्बाई तथा नाभि के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 2

(ख) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 4A + 5I = 0$ जहाँ I इकाई आव्यूह है। 2

(ग) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y -अक्ष को स्पर्श करता है और जिसका केन्द्र $(3, 4)$ है। 2

(घ) समीकरण

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}$$

को हल कीजिए। 2

(ङ) सिद्ध कीजिए कि वह त्रिभुज जिसके शीर्ष $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ और $(3, 1, 2)$ हैं एक समबाहु त्रिभुज है। 2

2. Attempt any four parts of the following :

(a) If the parabola $y^2 = 4ax$ passes through the point $(9, -12)$, then find length of Latus rectum and co-ordinate of focus. 2

(b) If matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ then prove that

$$A^2 - 4A + 5I = 0 \text{ where } I \text{ is unit matrix. } 2$$

(c) Find equation of the circle which touches y -axis and whose centre is $(3, 4)$. 2

(d) Solve the equation

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31} \quad 2$$

(e) Prove that triangle whose vertices are $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ and $(3, 1, 2)$ is an equilateral triangle. 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी उत्केन्द्रता $2/3$, नाभि $(3, 4)$ तथा नियता $3x + 4y = 5$ है। 2

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3 \quad 2$$

(ग) वृत्त $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि $2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{a}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)$ 2

(ङ) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, तो $A \cdot B$ तथा $B \cdot A$ ज्ञात कीजिए। 2

3. Attempt any four parts of the following :

(a) Find, the equation of the ellipse whose eccentricity is $2/3$, focus $(3, 4)$ and directrix $3x + 4y = 5$.

(b) Prove that

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

(c) Find centre and radius of circle

$$3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$$

(d) Prove that $2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{a}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)$

(e) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Find $A \cdot B$ and $B \cdot A$.

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन प्रश्नों को हल कीजिए :

(क) निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$$

(ख) $\cot^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x} - \sqrt{1+\sin x}} \right\}$ का मान निकालिए ।

(ग) बिन्दुओं $(4, 8, 10)$ और $(6, 10, -8)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को yz तल किस अनुपात में विभक्त करता है ? उसे ज्ञात कीजिए ।

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

4. Attempt any three parts of the following:

(a) Solve the following inequalities by graphical method :

$$2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12.$$

(b) Evaluate : $\cot^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x} - \sqrt{1+\sin x}} \right\}$

(c) Find the ratio in which the line joining the points $(4, 8, 10)$ and $(6, 10, -8)$ is divided by yz -plane.

(d) Prove that $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

5. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि रेखा $Lx + my + n = 0$, अतिपरवलय

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2/2 - b^2m^2 = n^2$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

(ग) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र सरल रेखा $3x + 4y = 5$ पर स्थित है तथा वह बिन्दुओं $(1, -2)$ और $(4, -3)$ से गुजरता है ।

(घ) तीन बिन्दु $P(3, 2, -4)$, $Q(5, 4, -6)$ और R समरेखीय हैं । यदि Q रेखा PR को $1 : 2$ के अनुपात में विभाजित करता है, तो बिन्दु R का निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

Attempt any three parts of the following :

(a) If line $lx + my + n = 0$, be tangent of

hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, then prove that

$$a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$$

(b) Prove that $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

(c) Find the equation of the circle whose centre lies on the line $3x + 4y = 5$ and passes through the points $(1, -2)$ and $(4, -3)$.

(d) Three points $P(3, 2, -4)$, $Q(5, 4, -6)$ and R are collinear. If the point Q divides the line PR in the ratio $1 : 2$, find the co-ordinates of the point R .

निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) यदि $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi/2$, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos^{-1}x = \sin^{-1}y$.

(ii) 10 से कम क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनके योगफल 11 से अधिक हों।

(ख) यदि $[x-5-1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ तो x का

मान ज्ञात कीजिए।

i. Attempt any one part of the following :

(a) (i) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi/2$, then prove that $\cos^{-1}x = \sin^{-1}y$.

(ii) Obtain such a couple of odd serial numbers whose sum is greater than 11 and which are less than 10.

(b) If $[x-5-1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, then find the value of x .

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) यदि किसी दीर्घवृत्त के लघु अक्ष के सिरों और नाभियों को मिलाने वाली सरल रेखाओं के मध्य कोण 90° हो, तो उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

7. Attempt any one part of the following :

(a) If in any ellipse, angle between lines joining the end points of minor axis and its foci is 90° , then find the eccentricity.

(b) Prove that inverse of a non-singular square matrix is unique.

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) क्रमर नियम की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + 2y - 3z = -4, 2x + 3y + 2z = 2, 3x - 3y - 4z = 11.$$

(ख) आव्यूह विधि से निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

8. Attempt any one part of the following :

(a) Solve the following system of equations by Cramer's Rule :

$$x + 2y - 3z = -4, 2x + 3y + 2z = 2, 3x - 3y - 4z = 11.$$

(b) Solve the following equations by matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$